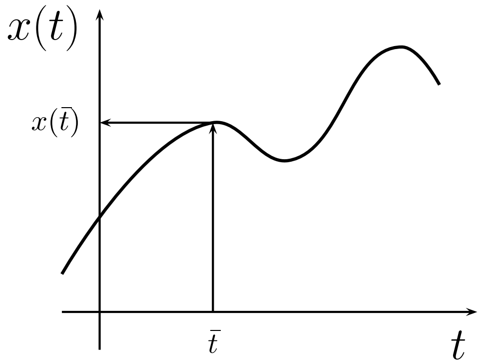
RICHIAMI MATEMATICI

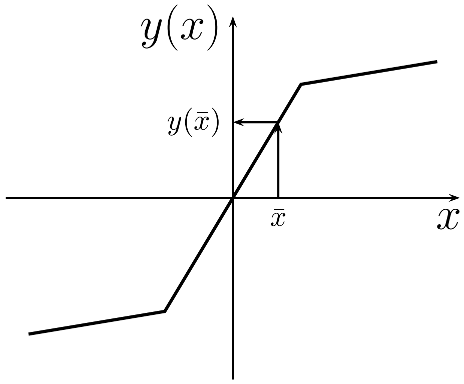
- **Funzioni reali del tempo**:

$$x(t) : t \to x(t)$$



- **Funzioni reali dell'ingresso**:

$$y(x) : x \to y(x)$$



- **Numeri complessi**. Un numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali:

$$(x,\ y)$$

dove x è la parte reale ed y è la parte immaginaria. Vi sono molti modi equivalenti di rappresentare i numeri complessi:

1) Utilizzando il numero immaginario puro j:

$$(x,\ y) \equiv x + j\,y$$

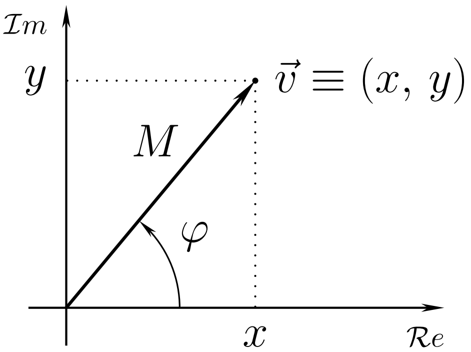
Il numero j indica qual è la parte immaginaria. Il numero soddisfa le seguenti relazioni:

$$j = \sqrt{-1}, \qquad j^2 = -1, \qquad j^3 = -j, \qquad j^4 = 1, \qquad j^5 = j$$

2) I numeri complessi $(x,\, y)$ possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di un piano:

$$\vec{v} \equiv (x,\, y) \equiv x + j\, y$$

x indica la parte reale
y indica la parte immaginaria.



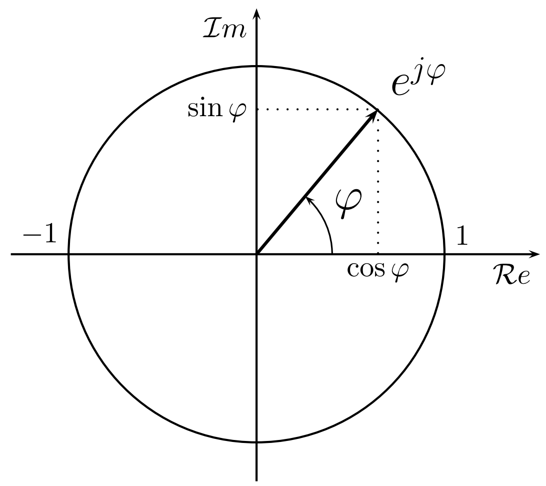
3) I punti del piano, a loro volta, possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i vettori $\vec{v}$ che collegano il punto $(x,\, y)$ all'origine. Il vettore $\vec{v}$ può essere espresso in forma "cartesiana" o in forma "polare":

$$\vec{v} = x + j\, y = M\angle\varphi = M\, e^{j\varphi}$$

Con M si è indicato il modulo e con φ la fase del vettore $\vec{v}$.

- Il numero complesso $e^{j\varphi}$ rappresenta un vettore a modulo unitario e fase φ. Vale la relazione:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\, \sin\varphi$$

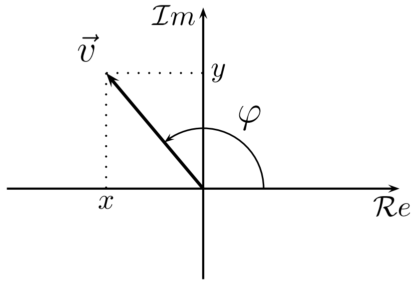


- In qualsiasi momento è possibile passare da una rappresentazione "cartesiana" $(x,\, y)$ ad una rappresentazione "polare" (e viceversa) del numero complesso utilizzando le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} M = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = M \cos\varphi \\ y = M \sin\varphi \end{cases}$$

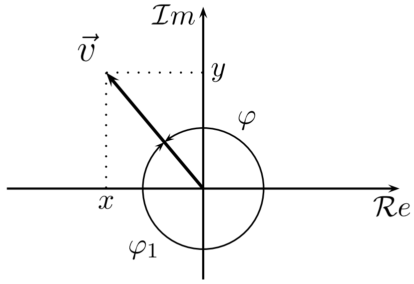
Attenzione: la funzione "$\arctan$" fornisce valori φ compresi nell'intervallo $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Quando x assume valori negativi occorre sommare a φ una fase costante $\varphi_0 = \pi$.

1) La fase φ di un vettore $\vec{v}$ del piano, e quindi la fase φ del corrispondente numero complesso $x + j\,y$, si misura in senso **antiorario** rispetto al **semiasse reale positivo**.



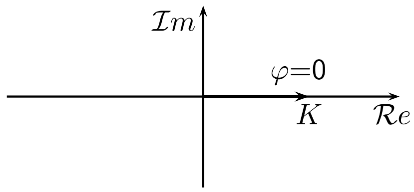
2) La fase φ di un vettore $\vec{v}$ del piano è definita a meno di un multiplo intero di 2π:

$$\arg[\vec{v}] = \varphi + 2k\pi, \qquad \forall k \in \mathcal{Z}$$



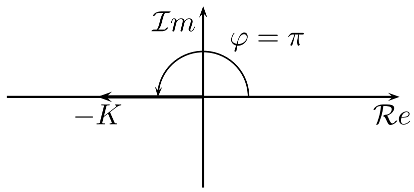
3) La fase dei numeri reali positivi $K > 0$ è nulla:

$$\varphi = \arg[K] = 0 + 2k\pi, \qquad \forall k \in \mathcal{Z}$$



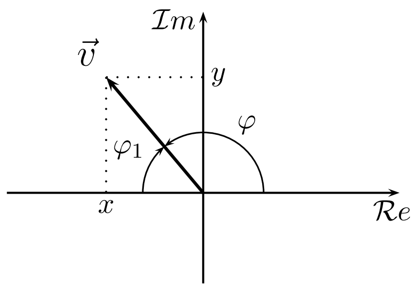
4) La fase dei numeri reali negativi $-K < 0$ è $\varphi = \pi$:

$$\varphi = \arg[-K] = \pi + 2k\pi, \qquad \forall k \in \mathcal{Z}$$



5) Per calcolare la fase φ di un vettore $\vec{v} = x + jy$ con parte reale negativa, $x < 0$, utilizzare la formula:

$$\varphi = \arg[\vec{v}] = \pi - \arctan\left[\frac{y}{|x|}\right]$$



6) Il modulo del prodotto di numeri complessi è uguale al **prodotto dei moduli**. Esempio:

$$\left|\frac{(1+3j)}{(2-5j)(-4+j)}\right| = \frac{|1+3j|}{|2-5j|\,|-4+j|} = \frac{\sqrt{1^2+3^2}}{\sqrt{2^2+5^2}\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{29}\sqrt{17}}$$

7) La fase del prodotto o del rapporto di numeri complessi è uguale, rispettivamente, alla **somma o alla differenza delle fasi** dei singoli elementi. Esempio:

$$\arg\left[\frac{(1+3j)}{(2-5j)(-4+j)}\right] = \arctan\frac{3}{1} - \left[\arctan\frac{-5}{2} + \pi - \arctan\frac{1}{4}\right]$$

Esempi

Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ delle seguenti funzioni di risposta armonica $G(j\omega)$ con $\omega > 0$:

1) $$G(j\omega) = \frac{(j\omega - 2)(j3\omega + 4)}{j\omega(j\omega + 2)}\, e^{-j5\omega}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{16+9\omega^2}}{\omega} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan\frac{\omega}{2} + \arctan\frac{3\omega}{4} - 5\,\omega - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{2} \\ \qquad\;\; = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\frac{\omega}{2} + \arctan\frac{3\omega}{4} - 5\,\omega \end{cases}$$

2) $$G(j\omega) = \frac{(2 + 3j\omega)(2j\omega - 1)}{(j\omega)^2(j\omega + 5)^2}\, e^{-4j\omega t_0}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{4+9\omega^2}\,\sqrt{1+4\omega^2}}{\omega^2(25+\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = \arctan\frac{3\omega}{2} + \pi - \arctan 2\omega - 4\omega t_0 - \pi - 2\arctan\frac{\omega}{5} \\ \qquad\;\; = \arctan\frac{3\omega}{2} - \arctan 2\omega - 4\omega t_0 - 2\arctan\frac{\omega}{5} \end{cases}$$

3) $$G(j\omega) = \frac{(j\omega + 3)(j\omega - 3)}{j\omega(2 - 5j\omega)}\, e^{-j3\omega t_0}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{\omega^2+9}{\omega\sqrt{4+25\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = \arctan\frac{\omega}{3} + \pi - \arctan\frac{\omega}{3} - 3\omega t_0 - \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{5\omega}{2} \\ \qquad\;\; = \frac{\pi}{2} - 3\omega t_0 + \arctan\frac{5\omega}{2} \end{cases}$$

4) $$G(j\omega) = \frac{(1 - 5j\omega)^2}{(j\omega)^2(j\omega + 3)}\, e^{-2j\omega t_0}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{1+25\omega^2}{\omega^2\sqrt{\omega^2+9}} \\ \varphi(\omega) = -2\arctan 5\,\omega - 2\omega t_0 - \pi - \arctan\frac{\omega}{3} \end{cases}$$

5) $$G(j\omega) = \frac{(3 - j\omega)}{j\omega(1 + 5j\omega)^2}\, e^{-2j\omega t_0}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2+9}}{\omega(1+25\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{3} - 2\omega t_0 - \frac{\pi}{2} - 2\,\arctan 5\,\omega \end{cases}$$

- **Funzioni complesse di variabile reale**. Si consideri, per esempio, la seguente funzione $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{100}{(4 + j\,\omega)(13 - \omega^2 + j\,4\omega)} = M(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)}$$

La funzione $F(\omega)$ associa ad ogni valore reale di ω un numero complesso $F(\omega)$ avente modulo $M(\omega) = |F(\omega)|$ e fase $\varphi(\omega) = \arg[F(\omega)]$.

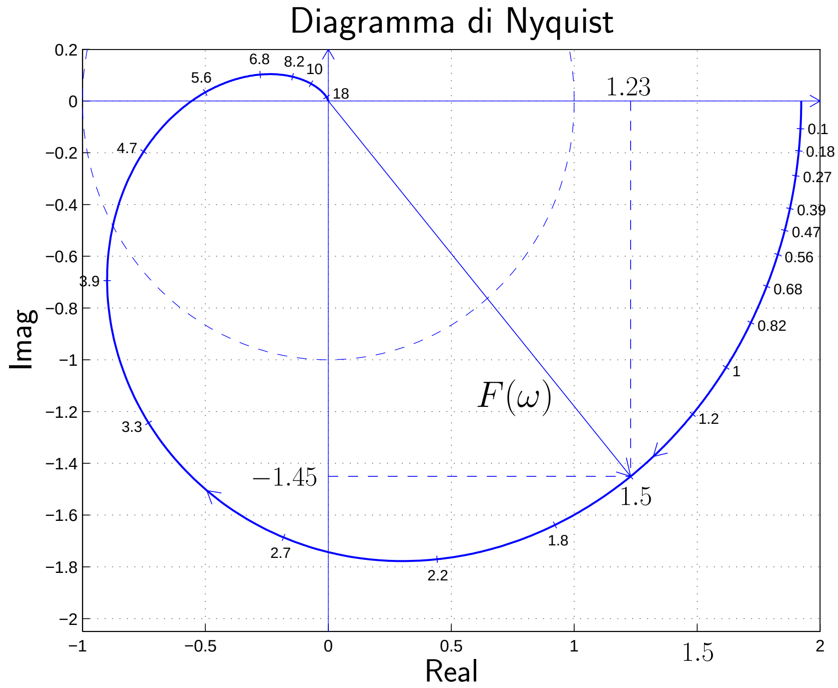
$$F(\omega)\ :\quad \omega \to F(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

La funzione $F(\omega)$ può rappresentare, per esempio, la funzione di risposta armonica di un sistema lineare:

$$x(t) = X\,\sin\omega t \longrightarrow \boxed{F(\omega)} \longrightarrow y(t) = \underbrace{M(\omega)\,X}_{Y(\omega)}\,\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

In questo caso il modulo $M(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}$ ha il significato di "guadagno" del sistema alla pulsazione ω, mentre $\varphi(\omega)$ rappresenta lo sfasamento della sinusoide di uscita $y(t) = Y(\omega)\,\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$ rispetto a quella di ingresso $x(t) = X\,\sin\omega t$.

- Funzioni $F(\omega)$ di questo tipo possono essere rappresentate, al variare del parametro ω, come curve sul piano complesso:



In corrispondenza della pulsazione $\omega = 1.5$ si ha:

$$F(\omega)|_{\omega=1.5} = 1.23 - 1.45\,j = \sqrt{1.23^2 + 1.45^2}\;e^{-j\arctan\frac{1.45}{1.23}} = M\,e^{-j\varphi}$$

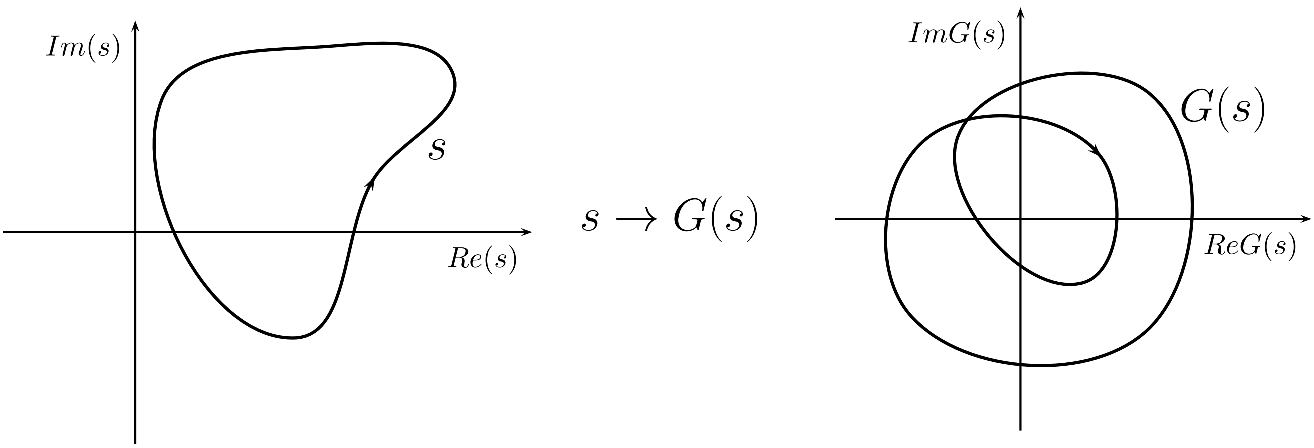
- **Funzioni complesse di variabile complessa**. Ad esempio la trasformata di Laplace $G(s)$ di un segnale continuo $g(t)$:

$$g(t) \qquad \leftrightarrow \qquad G(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-s\,t}\,dt$$

- Per ogni valore della variabile complessa s, la funzione $G(s)$ fornisce un numero complesso $G(s)$:

$$G(s):\ s \to G(s) \qquad\qquad s \in \mathbb{C},\ G(s) \in \mathbb{C}$$

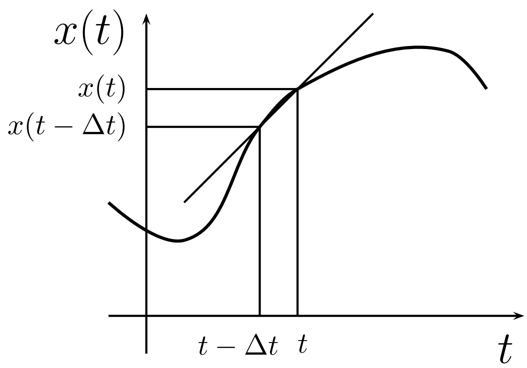
  Ad ogni curva chiusa del piano complesso s è associata una curva chiusa nel piano complesso $G(s)$:



- Una funzione di questo tipo è in grado di descrivere una "trasformazione" del piano complesso.

- **Derivata di una funzione**. Data la funzione $x(t)$, con $\dot{x}(t)$ si indica la derivata di $x(t)$ rispetto al parametro t, definita come segue:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t}$$



- La derivata $\dot{x}(t)$ descrive la "pendenza" funzione $x(t)$ nell'intorno del punto t.

Equazioni differenziali

- **Equazioni differenziali**. Sono dei legami algebrici tra una o più funzioni, per esempio $x(t)$, $y(t)$, ecc., e le loro derivate $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, ecc.

- Le equazioni differenziali possono essere:

  1) non lineari:

$$f(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ldots) = 0$$

  2) lineari tempo varianti (i coefficienti $a_i(t)$ e $b_i(t)$ variano nel tempo):

$$b_2(t)\ddot{y}(t) + b_1(t)\dot{y}(t) + b_0(t)y(t) = a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t)$$

  3) lineari tempo-invarianti (i coefficienti a_i e b_i sono costanti):

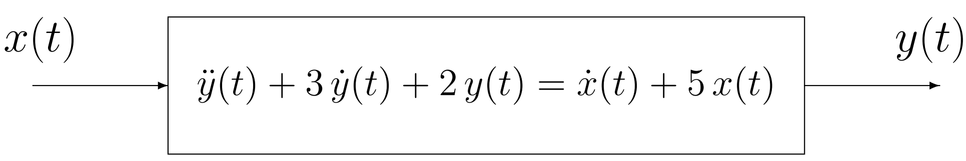
$$b_2\ddot{y}(t) + b_1\dot{y}(t) + b_0y(t) = a_1\dot{x}(t) + a_0x(t)$$

- Nel seguito si farà riferimento solamente ad equazioni differenziali lineari tempo-invarianti. Esempio:

$$\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = \dot{x}(t) + 5\,x(t)$$

- Vengono utilizzate per descrivere il comportamento dinamico di un sistema fisico. Conoscere l'equazione differenziale che descrive un sistema dinamico vuol dire conoscere completamente il sistema stesso.

- Utilizzando l'equazione differenziale è possibile prevedere (cioè calcolare) quale sarà l'andamento futuro dell'uscita $y(t)$ del sistema, noto che sia l'andamento dell'ingresso $x(t)$.



- Noto $x(t)$, l'incognita dell'equazione differenziale è la funzione $y(t)$. Eseguire questo calcolo vuol dire "risolvere" l'equazione differenziale del sistema per quel particolare andamento della funzione di ingresso $x(t)$.

- Dall'equazione differenziale è possibile ricavare anche la descrizione "statica" del sistema, basta mettere a zero tutte le derivate ($\dot{y}(t) = 0$, $\ddot{y}(t) = 0, \ldots,\ \dot{x}(t) = 0, \ddot{x}(t) = 0, \ldots$):

$$2\,y(t) = 5\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \frac{5}{2}\,x(t)$$

- È possibile anche tenere conto, eventualmente, delle condizioni iniziali del sistema (cioè dell' energia accumulata nel sistema all'istante iniziale).

- Nei problemi di controllo, le condizioni iniziali vengono spesso trascurate in quanto, per sistemi controllati stabili, la loro influenza tende ad annullarsi per $t \rightarrow \infty$.

- Le equazioni differenziali si possono risolvere in vari modi. Il modo più efficiente, dal punto di vista dei controlli, è quello di utilizzare le **Trasformate di Laplace**.

- Questo metodo si basa sull'utilizzo di funzioni complesse $X(s)$ ed $Y(s)$ della variabile complessa s messe in corrispondenza *biunivoca* con i corrispondenti segnali temporali $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) \qquad \leftrightarrow \qquad X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-s\,t}\,dt$$

$$y(t) \qquad \leftrightarrow \qquad Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-s\,t}\,dt$$

- Il vantaggio che si ha nell'utilizzo delle trasformate di Laplace è che l'equazione differenziale di partenza si trasforma in una semplice equazione algebrica facilmente risolubile.

- Una proprietà importante della trasformata di Laplace è la seguente:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0^-)$$

- Nel caso in cui le condizioni iniziali siano nulle, $x(0^-) = 0$, si ha:

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\,X(s)$$

cioè in ambito trasformato per derivare un segnale basta moltiplicare per "s" la sua trasformata di Laplace.

- Esempio. Applicando la trasformata di Laplace alla seguente equazione differenziale (se le condizioni iniziali sono nulle)

$$\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = \dot{x}(t) + 5\,x(t)$$

si ottiene la seguente relazione algebrica

$$s^2 Y(s) + 3\,s\,Y(s) + 2\,Y(s) = s\,X(s) + 5\,X(s)$$

$$(s^2 + 3\,s + 2)Y(s) = (s+5)X(s)$$

dalla quale si ricava il seguente legame tra la funzione di ingresso $X(s)$ e la funzione di uscita $Y(s)$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(s+5)}{s^2 + 3\,s + 2}}_{G(s)} X(s) = G(s)\,X(s)$$

- La funzione $G(s)$ prende il nome di **funzione di trasferimento** del sistema. Essa caratterizza completamente il sistema in esame e si ricava direttamente e in modo biunivoco dalla corrispondente equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = \dot{x}(t) + 5\,x(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad G(s) = \frac{(s+5)}{s^2 + 3\,s + 2}$$

- La relazione $Y(s) = G(s)X(s)$ indica che la risoluzione di equazioni differenziali in ambito trasformato è molto semplice: la trasformata $Y(s)$ del segnale di uscita si ricava semplicemente moltiplicando la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema per la trasformata di Laplace $X(s)$ del segnale di ingresso:

$$Y(s) = G(s)X(s) \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)X(s)]$$

Per ricavare $y(t)$ sarà sufficiente antitrasformare la funzione $Y(s)$.