

## Scomposizione in fratti semplici

- La determinazione dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata di un sistema lineare stazionario richiede l'antitrasformazione di una funzione razionale fratta di questo tipo:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} := \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- La differenza  $r = n - m$  fra i gradi del denominatore e del numeratore prende il nome di **grado relativo** della funzione razionale  $Y(s)$ .
- La funzione  $Y(s)$  può essere *scomposta in fratti semplici* solo se è strettamente propria, cioè se presenta un grado relativo  $r \geq 1$ . Se la funzione  $Y(s)$  ha grado relativo  $r = 0$  può essere scomposta nel seguente modo:

$$Y(s) = y_0 + Y_1(s)$$

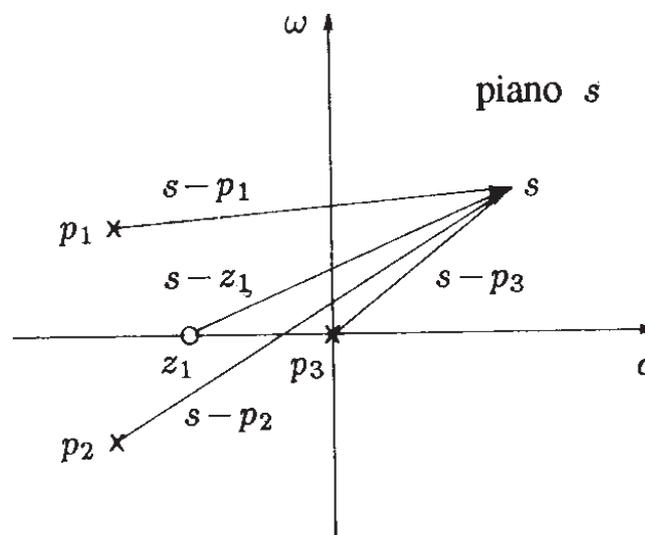
dove la costante  $y_0$  e la funzione  $Y_1(s)$ , con grado relativo  $r \geq 1$ , sono:

$$y_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s), \quad Y_1(s) = Y(s) - y_0.$$

- La funzione  $Y(s)$  può sempre essere espressa anche in forma fattorizzata:

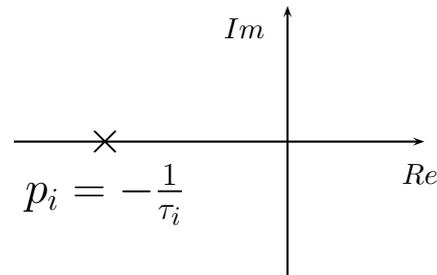
$$Y(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

- Le costanti complesse  $z_1, \dots, z_m$  e  $p_1, \dots, p_n$  vengono dette, rispettivamente, **zeri** e **poli** della funzione  $Y(s)$ .
- Valutazione grafica della funzione  $Y(s)$ :



- Ad ogni *polo reale*  $p_i$  della funzione  $Y(s)$  viene associata una **costante di tempo**  $\tau_i$  così definita:

$$\tau_i = -\frac{1}{p_i}$$



La costante di tempo  $\tau_i$  è positiva solo se il polo reale  $p_i$  è negativo. In modo analogo, per gli *zeri reali*  $z_j$  vale la relazione:  $\tau_j = -1/z_j$ .

- Nel caso di *poli complessi coniugati*,  $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$ , ( $-\sigma$  è la parte reale e  $\omega$  è la parte immaginaria del polo) si utilizza anche la seguente parametrizzazione di “tipo polare”:

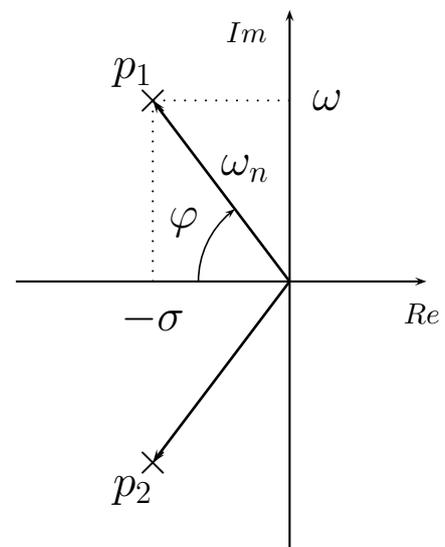
$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\sigma \pm j\omega \\ &= -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ &= -\omega_n \cos\varphi \pm j\omega_n \sin\varphi \end{aligned}$$

dove  $\omega_n$  è detta pulsazione naturale:

$$\omega_n = |p_1| = |p_2| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

e  $\delta$  è detto coefficiente di smorzamento:

$$\delta = \cos\varphi = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$$



Valgono le relazioni seguenti:

$$\sigma = \delta\omega_n, \quad \omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

- In relazione all'antitrasformazione si distinguono due casi:
  - tutti i poli della funzione  $Y(s)$  sono semplici*;
  - la funzione  $Y(s)$  ha anche poli multipli.*

### Antitrasformazione nel caso di poli semplici

- Nel caso di poli semplici la funzione può essere scomposta come segue:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}$$

- Le costanti  $K_i$  (dette *residui*) sono reali in corrispondenza dei poli reali e complesse coniugate in corrispondenza delle coppie di poli complessi coniugati. Le costanti  $K_i$  si ricavano utilizzando la seguente formula:

$$K_i = (s - p_i)Y(s) \Big|_{s=p_i}$$

- Una volta che la funzione  $Y(s)$  è stata scomposta in fratti semplici, è immediato antitrasformarla:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

- Esempio. Sia

$$Y(s) := \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{K_1}{s + 1} + \frac{K_2}{s + 2} + \frac{K_3}{s + 3}$$

I residui si calcolano nel modo seguente:

$$K_1 = \frac{5(-1) + 3}{(-1 + 2)(-1 + 3)} = -1$$

$$K_2 = \frac{5(-2) + 3}{(-2 + 1)(-2 + 3)} = 7$$

$$K_3 = \frac{5(-3) + 3}{(-3 + 1)(-3 + 2)} = -6$$

per cui si può scrivere

$$Y(s) = -\frac{1}{s + 1} + \frac{7}{s + 2} - \frac{6}{s + 3}$$

e quindi

$$y(t) = -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t}$$

Quando si hanno coppie di *poli complessi coniugati*

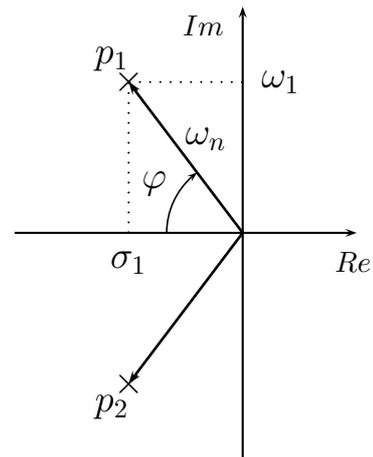
$$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1, \quad p_2 = \sigma_1 - j\omega_1$$

anche i residui sono complessi coniugati

$$K_1 = u_1 + jv_1, \quad K_2 = u_1 - jv_1$$

La somma di fratti semplici ad essi relativa è

$$\frac{u_1 + jv_1}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{u_1 - jv_1}{s - \sigma_1 + j\omega_1}$$



Posto

$$M_1 := 2|K_1| = 2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \quad \varphi_1 := \arg K_1 = \arg(u_1 + jv_1),$$

si può scrivere

$$\frac{M_1}{2} \left( \frac{e^{j\varphi_1}}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - \sigma_1 + j\omega_1} \right),$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$\frac{M_1}{2} (e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)}),$$

funzione che può essere posta nella forma

$$M_1 e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

oppure

$$M_1 e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \pi/2)$$

**Esempio.** Sia:

$$Y(s) := \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1 - j2} + \frac{K_3}{s + 1 + j2}$$

I residui sono i seguenti:

$$K_1 = \frac{7 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 5}{(0 + 1 - j2)(0 + 1 + j2)} = 1$$

$$K_2 = \frac{7(-1 + j2)^2 - 8(-1 + j2) + 5}{(-1 + j2)(-1 + j2 + 1 + j2)} = 3 + j4$$

$$K_3 = \frac{7(-1 - j2)^2 - 8(-1 - j2) + 5}{(-1 - j2)(-1 - j2 + 1 - j2)} = 3 - j4$$

e pertanto

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3 + j4}{s + 1 - j2} + \frac{3 - j4}{s + 1 + j2},$$

da cui, antitrasformando,

$$y(t) = 1 + 10 e^{-t} \cos(2t + \varphi),$$

dove  $10 = 2|K_2| = 2\sqrt{3^2 + 4^2}$  e  $\varphi = \arctan(4/3) = 53.13^\circ$ .

**Antitrasformazione nel caso di *poli multipli***

- Si suppone che la funzione razionale  $Y(s)$  abbia  $h$  poli distinti  $p_i$  ( $i = 1, \dots, h$ ), ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità  $r_i \geq 1$ :

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)^{r_1} (s - p_2)^{r_2} \dots (s - p_h)^{r_h}} = \sum_{i=1}^h \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s - p_i)^{r_i - \ell + 1}}$$

- Le costanti  $K_{i\ell}$  si ricavano mediante la formula

$$K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell - 1)!} \frac{d^{\ell-1}}{ds^{\ell-1}} \left[ (s - p_i)^{r_i} Y(s) \right] \Big|_{s=p_i}$$

dove ( $i = 1, \dots, h; \ell = 1, \dots, r_i$ ). Antitrasformando la  $Y(s)$  si ottiene:

$$y(t) = \sum_{i=1}^h \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(r_i - \ell)!} t^{r_i - \ell} e^{p_i t}$$

- I coefficienti  $K_{i\ell}$  sono complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati. I termini complessi coniugati corrispondono a prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche, e si ottengono con un procedimento del tutto analogo a quello seguito nel caso di poli distinti.

- Esempio:

$$Y(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 1)^2} = \frac{K_{11}}{s + 2} + \frac{K_{22}}{s + 1} + \frac{K_{21}}{(s + 1)^2}$$

dove

$$K_{11} = [(s + 2) Y(s)] \Big|_{s=-2} = 1$$

$$K_{22} = \frac{d}{ds} [(s + 1)^2 Y(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{s + 2} \right] \Big|_{s=-1} = -1$$

$$K_{21} = [(s + 1)^2 Y(s)] \Big|_{s=-1} = 1$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t e^{-t}$$

### Sviluppi in somme di fratti semplici

- Si consideri il rapporto di polinomi

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- Valgono le seguenti proprietà:

*i)* se è  $n = m + 1$ , la somma dei residui di  $Y(s)$  è  $\frac{b_m}{a_n}$ ;

*ii)* se è  $n > m + 1$ , la somma dei residui di  $Y(s)$  è zero.

Si ricorda che, nello sviluppo in fratti, i residui di  $Y(s)$  sono i coefficienti dei termini con polinomio a denominatore di primo grado.

- Esempio 1:

$$Y(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} + \frac{C}{s - p_3}$$

Calcolati  $A$  e  $B$ , il calcolo del residuo  $C$  è immediato:  $C = -(A + B)$ .

- Esempio 2:

$$Y(s) = \frac{1}{(s - p_1)^2 (s - p_2)} = \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{C}{s - p_2}$$

Il coefficiente  $A$  e il residuo  $C$  si possono calcolare immediatamente:

$$A = \frac{1}{p_1 - p_2}, \quad C = \frac{1}{(p_2 - p_1)^2}$$

Applicando la proprietà *ii* si deduce:  $B = -C$ .

- Esempio 3:

$$Y(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)^3 (s - p_2)} = \frac{A}{(s - p_1)^3} + \frac{B}{(s - p_1)^2} + \frac{C}{s - p_1} + \frac{D}{s - p_2}$$

Il coefficiente  $A$  e il residuo  $D$  si calcolano immediatamente. Applicando la proprietà *ii* si deduce:  $C = -D$ . Moltiplicando ambo i membri dello sviluppo per  $(s - p_1)$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{s - z_1}{(s - p_1)^2 (s - p_2)} &= \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + C + D \frac{s - p_1}{s - p_2} \\ &= \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{E}{s - p_2} \end{aligned}$$

da cui si calcola

$$E = \frac{p_2 - z_1}{(p_2 - p_1)^2}$$

Applicando la proprietà *ii* al nuovo sviluppo, si ottiene  $B = -E$ .

**Approccio diretto all'antitrasformazione: poli semplici**

- Nel caso in cui la funzione  $Y(s)$  sia posta nella seguente forma:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s+a_1) \dots (s+a_p) [(s+\sigma_1)^2 + \omega_1^2] \dots [(s+\sigma_q)^2 + \omega_q^2]}$$

caratterizzata da  $p$  poli reali semplici in  $p_i = -a_i$  e da  $q$  poli complessi coniugati semplici in  $p_j = -\sigma_j \pm j\omega_j$ , la funzione antitrasformata  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$  può essere calcolata anche nel seguente modo:

$$y(t) = \sum_{i=1}^p K_i e^{-a_i t} + \sum_{j=1}^q \frac{|\bar{H}_j|}{\omega_j} e^{-\sigma_j t} \sin(\omega_j t + \arg \bar{H}_j)$$

dove i coefficienti  $K_i$  e  $\bar{H}_j$  si calcolano utilizzando le seguenti formule:

$$K_i = (s+a_i) Y(s) \Big|_{s=-a_i}$$

$$\bar{H}_j = [(s+\sigma_j)^2 + \omega_j^2] Y(s) \Big|_{s=-\sigma_j + j\omega_j}$$

**Esempio.** Si calcoli la risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Occorre antitrasformare la seguente funzione di uscita:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

La funzione  $Y(s)$  ha poli semplici in 0 e in  $-\delta\omega_n \pm j\omega$  dove  $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$ . I coefficienti  $K_1$  e  $\bar{H}_1$  hanno il seguente valore:

$$K_1 = s Y(s) \Big|_{s=0} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \Big|_{s=0} = 1$$

$$\bar{H}_1 = (s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2) Y(s) \Big|_{s=-\delta\omega_n + j\omega} = \frac{\omega_n^2}{-\delta\omega_n + j\omega} = \omega_n e^{j(-\pi + \varphi)}$$

dove  $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} = \arccos \delta$ . Il calcolo di  $y(t)$  è ora immediato:

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{\omega} e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t - \pi + \varphi)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

### Modi della risposta temporale

- L'unica difficoltà nell'antitrasformazione di funzioni razionali fratte  $Y(s)$  è la fattorizzazione del polinomio a denominatore.
- Il comportamento temporale della funzione antitrasformata  $y(t)$  è essenzialmente legato alla posizione dei poli  $p_i$  della funzione  $Y(s)$ . Ai poli semplici  $s_i = -\sigma$  e ai poli complessi coniugati  $s_j = -\sigma \pm j\omega$  sono associati termini temporali  $y_i(t)$  e  $y_j(t)$ , detti *modi*, del seguente tipo:

$$(s + \sigma) \quad \Rightarrow \quad y_i(t) = K e^{-\sigma t}$$

$$(s + \sigma)^2 + \omega^2 \quad \Rightarrow \quad y_j(t) = M e^{-\sigma t} \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

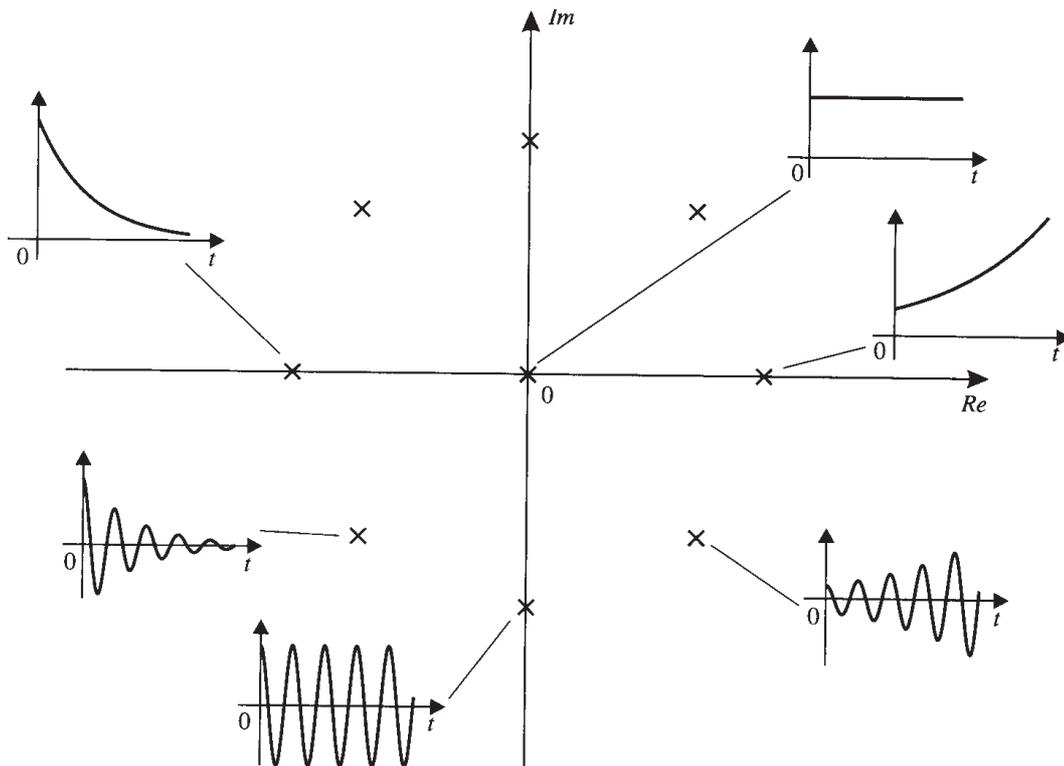
Nel caso di poli multipli con grado molteplicità  $r$  si hanno i seguenti *modi*:

$$(s + \sigma)^r \quad \Rightarrow \quad y_i(t) = \sum_{n=0}^{r-1} K_n t^n e^{-\sigma t}$$

$$[(s + \sigma)^2 + \omega^2]^r \quad \Rightarrow \quad y_j(t) = \sum_{n=0}^{r-1} M_n t^n e^{-\sigma t} \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

- Nel caso di *poli semplici*, i modi  $y_i(t)$  e  $y_j(t)$  tendono a zero per  $t$  tendente all'infinito se la parte reale del polo è negativa ( $-\sigma < 0$ ), restano limitati se essa è nulla ( $\sigma = 0$ ) e divergono se essa è positiva ( $-\sigma > 0$ ).
- Nel caso di *poli multipli*, i modi tendono a zero se la parte reale del polo è negativa ( $-\sigma < 0$ ) e divergono se essa è positiva o nulla ( $-\sigma \geq 0$ ).
- L'antitrasformata  $y(t)$  di una funzione razionale fratta  $Y(s)$  rimane limitata se e solo se la funzione  $Y(s)$  non presenta alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici. In caso contrario la funzione  $y(t)$  diverge.
- I poli che caratterizzano la risposta  $Y(s) = G(s)X(s)$  di un lineare sistema  $G(s)$  ad un segnale in ingresso  $X(s)$  (come l'impulso di Dirac, il gradino, la sinusoide) sono quelli della funzione di trasferimento  $G(s)$  più quelli relativi al segnale di ingresso  $X(s)$ .
- Un *sistema*  $G(s)$  è *asintoticamente stabile* se tutti i suoi poli sono a parte reale negativa: in questo caso tutti i modi  $y_i(t)$  e  $y_j(t)$  associati ai poli della funzione  $G(s)$  tenderanno sicuramente a zero quando  $t$  tendente all'infinito.

- Modi della risposta nel caso di poli distinti ( $r = 1$ ):



- Modi della risposta nel caso di poli multipli ( $r = 2$ ):

