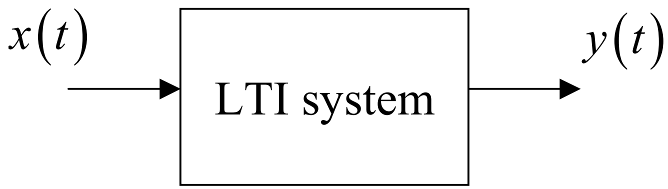
Trasformata di Fourier



Il segnale sinusoidale di ingresso $x(t)$ può essere rappresentato come

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$$

dove A è l'ampiezza dell'oscillazione, f_0 è la frequenza e ϕ_0 è la fase iniziale. Il fasore $\overset{\circ}{X}$ associato alla sinusoide $x(t)$ è tale per cui

$$x(t) = \Re\left[\overset{\circ}{X}\exp\left(j2\pi f_0 t\right)\right]$$

È possibile dimostrare che il segnale di uscita è una sinusoide avente frequenza f_0 che può essere rappresentata come

$$y(t) = \Re\left[\overset{\circ}{Y} \exp\left(j2\pi f_0 t\right)\right]$$

in cui il fasore $\overset{\circ}{Y}$ associato al segnale $y(t)$ è descritto dalle relazioni

$$\left|\overset{\circ}{Y}\right| = \left|H(f_0)\right|\left|\overset{\circ}{X}\right|$$

e

$$\angle\overset{\circ}{Y} = \angle\left|H(f_0)\right| + \angle\left|\overset{\circ}{X}\right|$$

dove $H(f)$ è la risposta in frequenza del sistema lineare tempo-invariante.

Trasformata di Fourier

Come è possibile analizzare dei segnali non sinusoidali ?

La trasformata di Fourier permette di rappresentare i segnali di uso comune nella pratica mediante una sovrapposizione di funzioni sinusoidali; tramite il principio di sovrapposizione degli effetti è poi possibile ricostruire il segnale analogico in uscita al sistema lineare tempo-invariante.

Consideriamo i segnali tempo-continui; l'energia E_x del segnale $x(t)$ è definita come

$$E_x \doteq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

e la potenza P_x come

$$P_x \doteq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$$

Consideriamo ora un segnale periodico, per il quale, quindi, vale la relazione

$$x(t) = x(t + T_0)$$

dove T_0 è il periodo del segnale $x(t)$. Ad eccezione della funzione identicamente nulla, l'energia del segnale $x(t)$ è infinita, mentre la sua potenza è data da

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \, dt$$

Il valor medio x_m di $x(t)$ è dato da

$$x_m = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt$$

Lo sviluppo in serie di Fourier permette di esprimereun qualunque segnale reale periodico come una sommadi oscillazioni sinusoidali di ampiezza,frequenza e fase opportune, cioè

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(2\pi k f_0 t + \vartheta_k\right)$$

La precedente espressione è chiamata sviluppo in serie di Fourier in forma polare.

Sostituendo la formula di Eulero

$$\cos(x) = \frac{\exp(jx) + \exp(-jx)}{2}$$

nella precedente equazione si ottiene lo sviluppo in serie di Fourier in forma complessa

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \exp\left(j2\pi k f_0 t\right)$$

con $f_0 = \frac{1}{T_0}$, dove la *k*-esima componente armonica X_k è definita come

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \exp\left(-j2\pi k f_0 t\right) dt$$

Osserviamo che X_0 coincide con il valor medio x_m.

Sviluppando le funzioni cosinusoidali della serie in forma polare si ottiene lo sviluppo in serie di Fourier in forma reale rettangolare

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(2\pi k f_0 t\right) - b_k \sin\left(2\pi k f_0 t\right)\right]$$

dove

$$a_k = \Re\left\{X_k\right\} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos\left(2\pi k f_0 t\right)dt$$

e

$$b_k = \Im\left\{X_k\right\} = -\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin\left(2\pi k f_0 t\right)dt$$

Nel caso il segnale $x(t)$ rappresenti un segnale tempo-continuo *aperiodico* la serie di Fourier “diventa” un integrale, e valgono le relazioni

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp\left(j2\pi ft \right) df$$

e

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\left(-j2\pi ft \right) dt$$

Si noti che le precedenti relazioni stabiliscono una corrispondenza tra rappresentazione nel dominio del tempo e rappresentazione nel dominio della frequenza di un segnale.

La funzione complessa $X(f)$ può essere espressa come modulo e fase

$$X(f) = A(f)\,\mathrm{e}^{j\theta(f)}$$

dove $A(f) = |X(f)|$ viene chiamato spettro di ampiezza e $\theta(f) = \angle X(f)$ viene detto spettro di fase.

Abbiamo trattato finora alcune proprietà dei segnali, ma rimane ancora da definire il concetto di *sistema*. Possiamo chiamare sistema monodimensionale (cioè caratterizzato da un solo ingresso ed una sola uscita) un qualunque apparato che produce un segnale di uscita in risposta alla sollecitazione del segnale di ingresso

Un sistema lineare tempo-invariante può essere caratterizzato equivalentemente tramite la sua risposta impulsiva o la sua risposta in frequenza.

La risposta impulsiva $h(t)$ è definita come l'uscita del sistema LTI quando all'ingresso viene applicato un impulso di Dirac.
La risposta in frequenza $H(f)$ può essere definita come

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

cioè data dal rapporto tra la trasformata di Fourier del segnale di uscita e la trasformata di Fourier del segnale di ingresso
La risposta in ampiezza e la risposta in fasedi una sistema LTI vengono definite in modo analogo a quanto precedentemente descritto.

Densità spetrale di energia

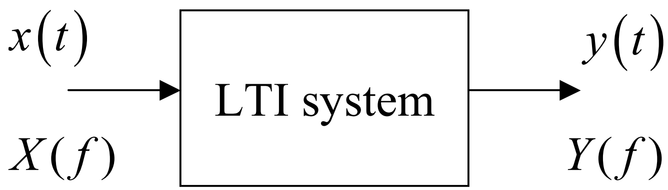
Consideriamo un segnale $x(t)$ a energia finita; vogliamo esprimere la sua energia E_x in funzione della trasformata $X(f)$ e quindi mettere in relazione l'energiadi un segnale tempo-continuo aperiodico con le sue caratteristiche spettrali.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)[\int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f)\exp(-j2\pi ft)df\,]dt =$$

$$= \int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f)[\int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)dt]df = \int_{f=-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$$

Densità spetrale di energia

Consideriamo ora il sistema



La relazione ingresso-uscita del sistema può essere espressa come

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Consideriamo le quantità

$$D_x(f) = |X(f)|^2$$

e

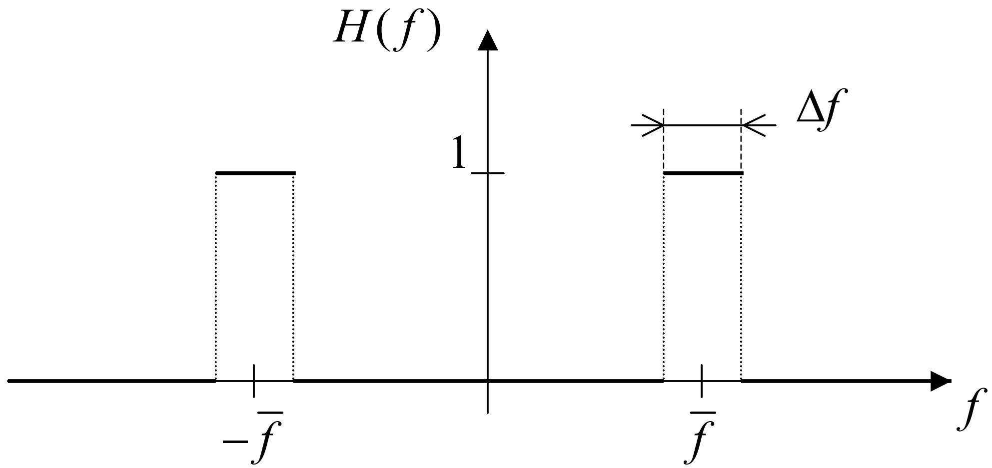
$$D_y(f) = |Y(f)|^2$$

proponendoci di individuare il loro significato fisico.

Densità spetrale di energia

$$D_y(f) = \left|Y(f)\right|^2 = \left|X(f)H(f)\right|^2 = \left|X(f)\right|^2 \left|H(f)\right|^2 = D_x(f)\left|H(f)\right|^2$$

Supponiamo che il sistemaLTI considerato sia un filtro passa – banda ideale



e calcoliamo l’energiain uscita.

Densità spetrale di energia

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} D_y(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} D_x(f)\left|H(f)\right|^2 df = \int_{-\bar{f}-\Delta f/2}^{-\bar{f}+\Delta f/2} D_x(f)df + \int_{\bar{f}-\Delta f/2}^{\bar{f}+\Delta f/2} D_x(f)df$$

$$= 2\int_{\bar{f}-\Delta f/2}^{\bar{f}+\Delta f/2} D_x(f)df$$

Per $\Delta f \to 0$ si ha che $E_y \simeq 2\Delta f D_x(\bar{f})$ e quindi $D_x(\bar{f}) \simeq \frac{1}{2}\frac{\Delta E_x(\bar{f})}{\Delta f}$

$D_x(\bar{f})$ rappresenta il contributo locale all'energia totale del segnale $x(t)$ dovuto alle sole componenti con frequenza appartenente ad un piccolo intorno centrato in $\bar{f}$ di ampiezza Δf .

$D_x(\bar{f})$ può essere definito come la densità spettrale di energia del segnale $x(t)$

Densità spetrale di energia

Analogamente, per un segnale $x(t)$ a potenza finita, la densità spettrale di potenza $S_x(f)$ è definita come

$$S_x(f) \doteq \lim_{T\to 0} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

dove $X_T(f)$ è la trasformata continua di Fourier del segnale $x(t)$ troncato su un intervallo temporale di durata T .

La relazione ingresso – uscita per la densità spettrale di potenza è

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$$

Densità spetrale di energia

Si può dimostrare che la densità spettrale di potenza di un segnale periodico può essere espressa come

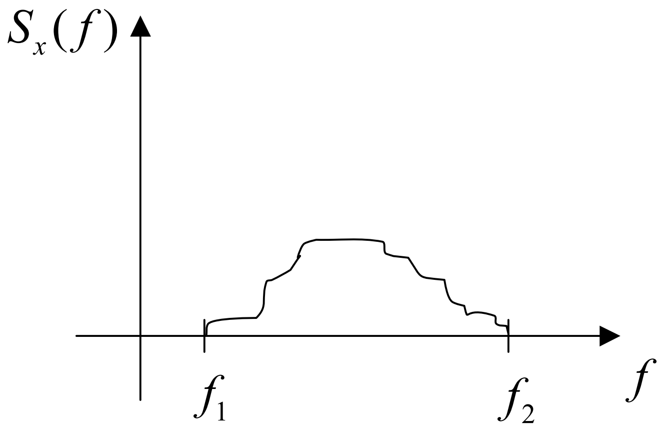
$$S_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

dove $\delta(\cdot)$ è la funzione impulsiva di Dirac e T_0 è il periodo del segnale $x(t)$

Banda di un segnale

- La banda di un generico segnale $x(t)$ è definita convenzionalmente
- Nel seguito vengono elencate alcune definizioni di banda attualmente utilizzate nella pratica

1. Banda assoluta

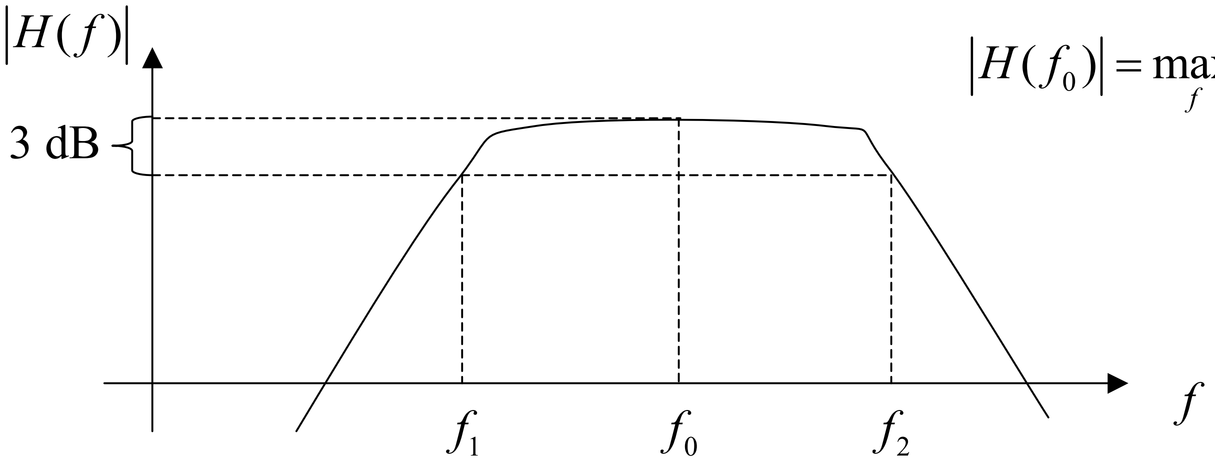


$$B = f_2 - f_1$$

$$S_x(f) \neq 0 \qquad f_1 \leq f \leq f_2$$

$$S_x(f) = 0 \qquad f < f_1 \ , f > f_2$$

2. Banda a –3 dB

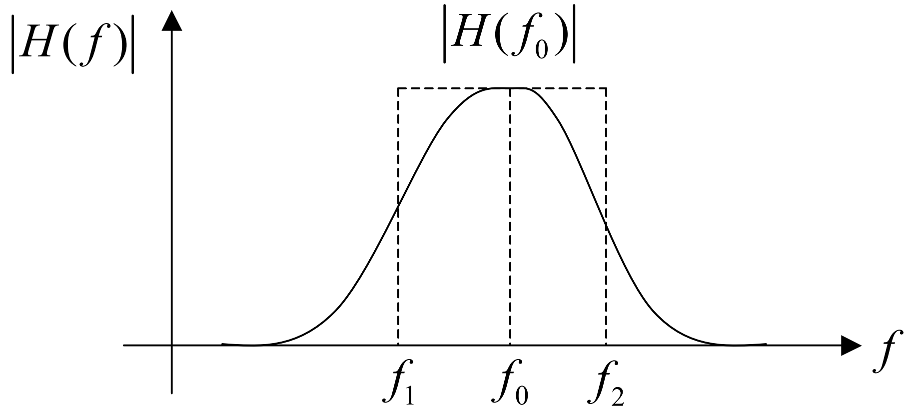


$$|H(f_0)| = \max_f |H(f)|$$

$$B = f_2 - f_1$$

$$\left.\begin{aligned} &|H(f)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |H(f_0)| \\ &|H(f)|_{dB} \geq |H(f_0)|_{dB} - 3 \text{ dB} \end{aligned}\right\} \quad f_1 \leq f \leq f_2$$

3. Banda equivalente di rumore



La definizione si basa su un filtro ideale avente guadagno $|H(f_0)|$, dove $|H(f_0)|$ è il guadagno massimo del filtro reale.

La banda equivalente B_{eq} si ricava imponendo l'uguaglianza tra la potenza di rumore all'uscita del filtro ideale

$$\text{potenza equivalente} = B_{eq} |H(f_0)|$$

e la potenza all' uscita del filtro reale

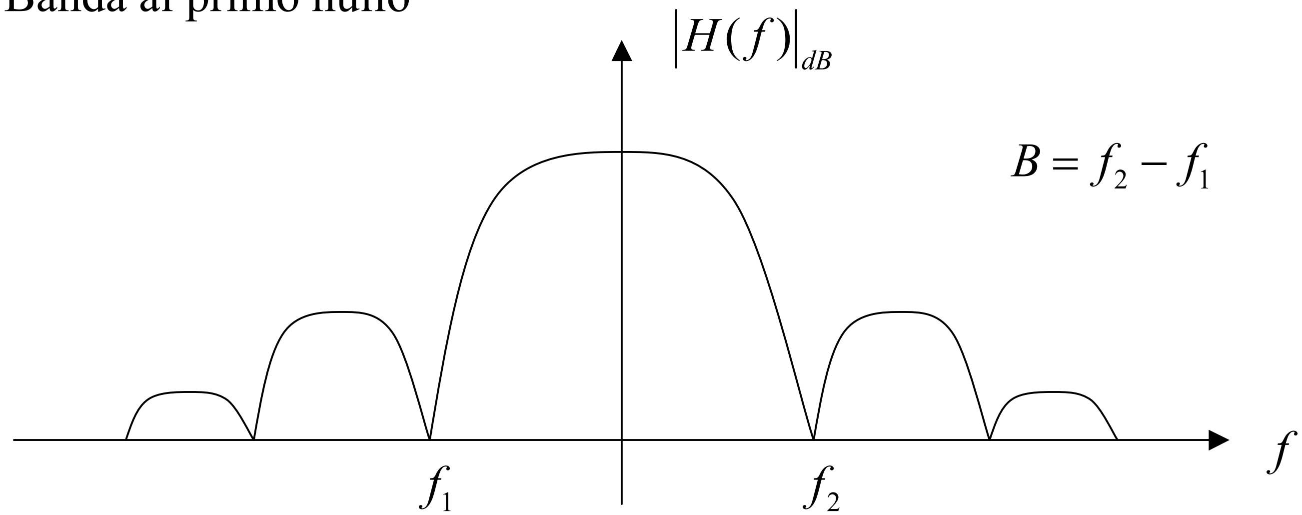
$$\text{potenza effettiva} = \int_0^{\infty} |H(f)| df$$

da cui deriva

$$B_{eq} = \frac{1}{|H(f_0)|} \int_0^{\infty} |H(f)| df$$

Banda di un segnale

4. Banda al primo nullo



5. Banda a –x dB

È definita in modo analogo alla banda a –3 dB. Tipicamente il valore di x è 20 o 50 dB.

6. Banda al 99 %

Nell'intervallo $\left[f_1, f_2 \right]$ si trova il 99 %dell 'energia del segnale,cio è

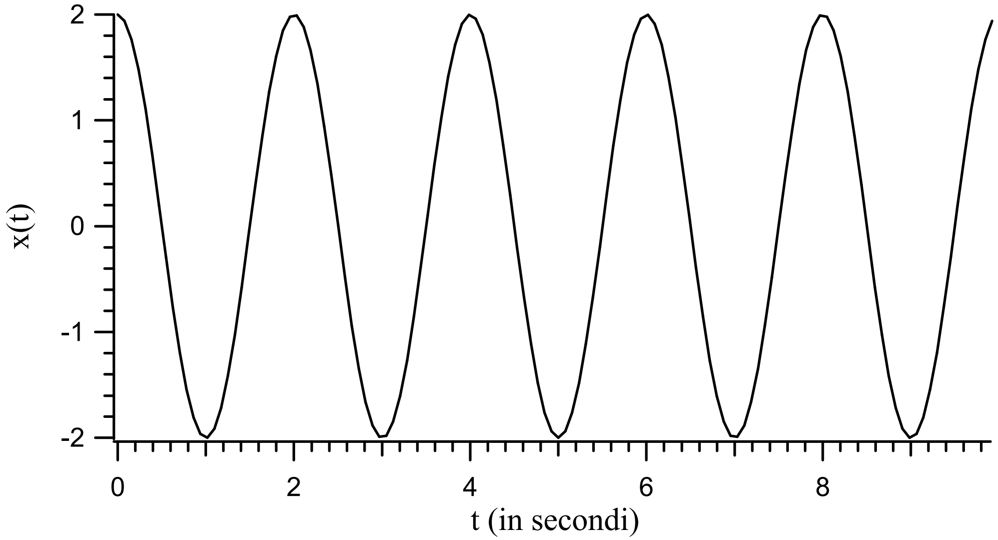
$$\int_{f_1}^{f_2} D_x(f)df = 0.99\ E_x$$

Oscillazione cosinusoidale

- Espressione analitica dell'oscillazione cosinusoidale

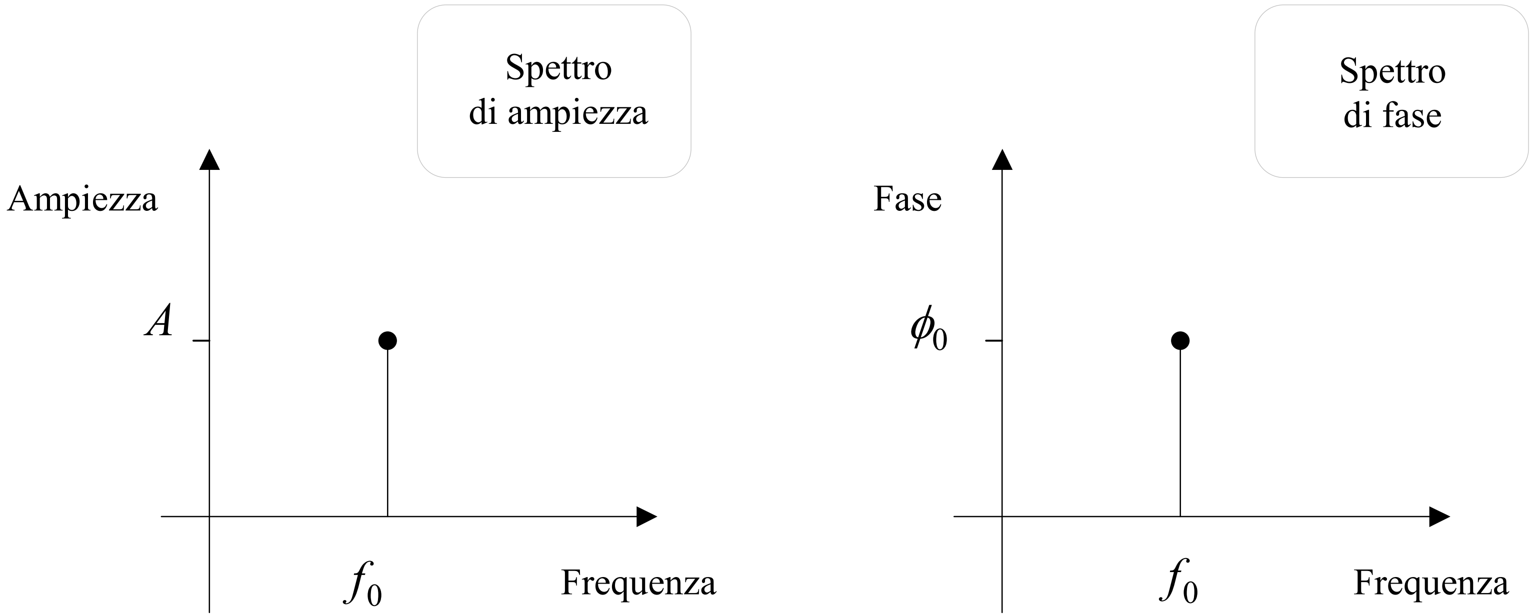
$$x(t) = A\cos\phi(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$$

- Il segnale $x(t)$ si ripete con periodo T secondi ed oscilla fra i due valori estremi A e $-A$

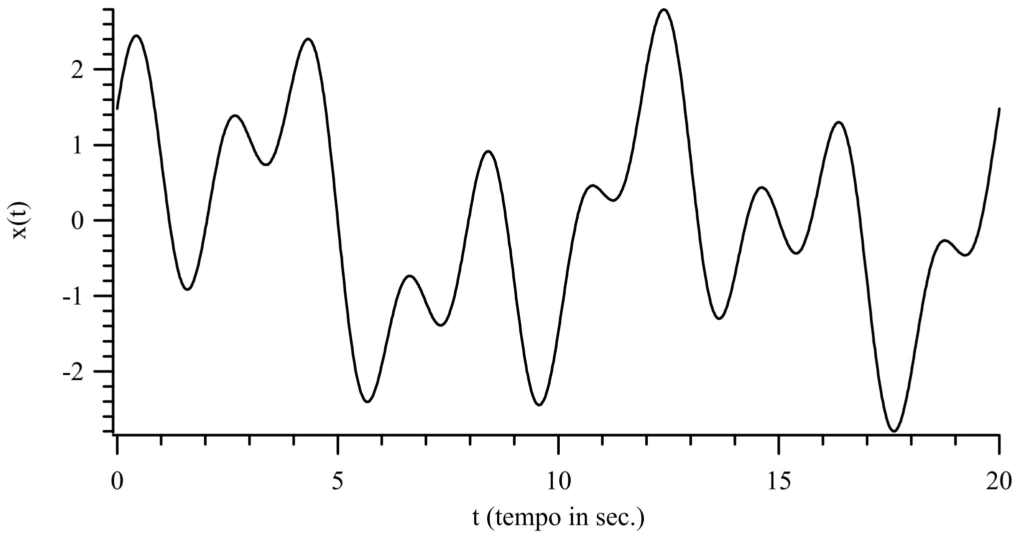


$$A = 2, \phi_0 = 0$$
$$T = 2 \text{ sec}$$
$$f_0 = 1/T = 0.5\ Hz$$

Rappresentazione in frequenza di una oscillazione cosinusoidale

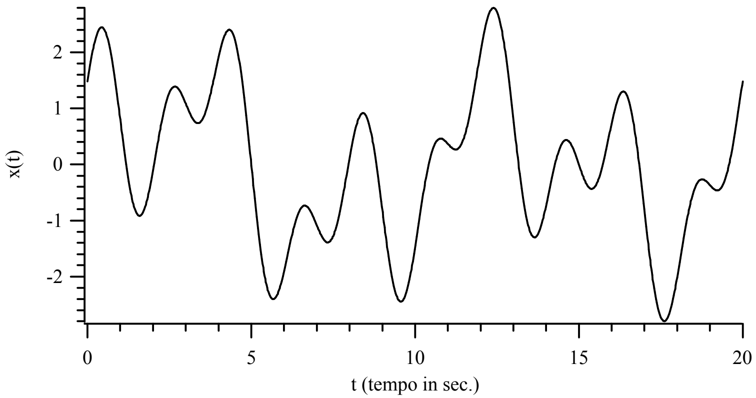


Rappresentazione di un segnale periodico



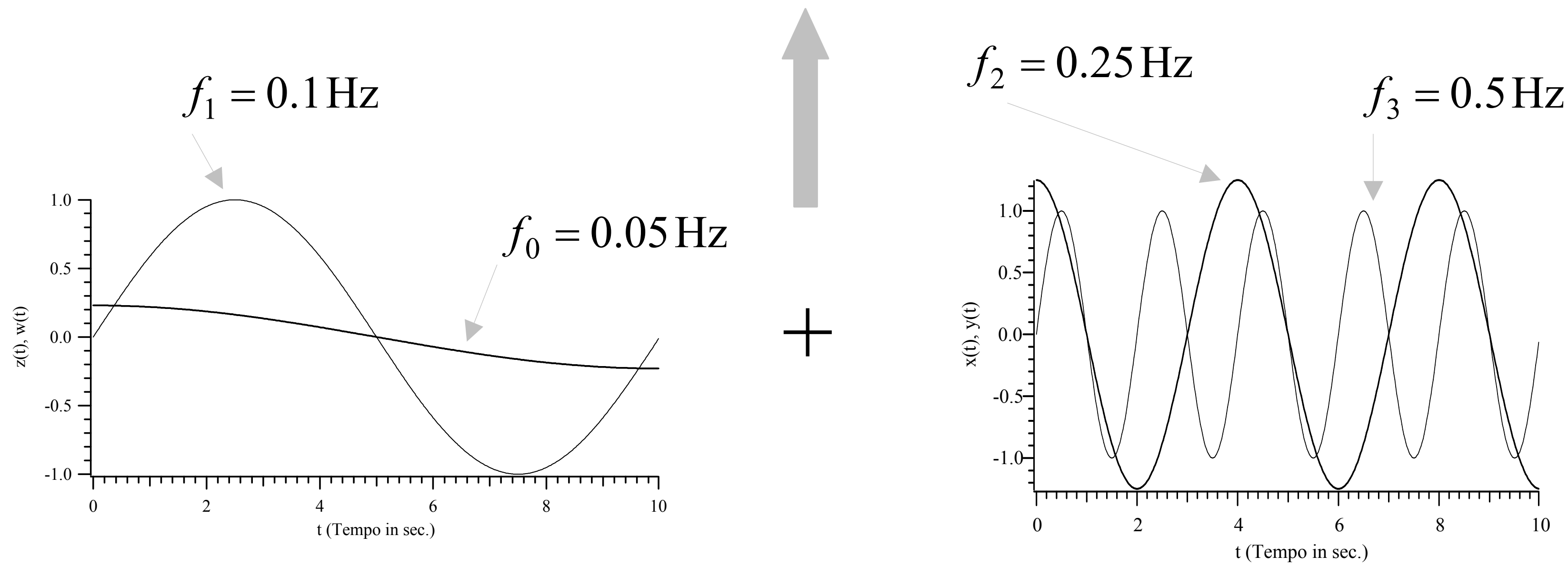
- Segnale periodico di periodo $T_0 = 20\,\text{sec}$

Rappresentazione di un segnale arbitrario

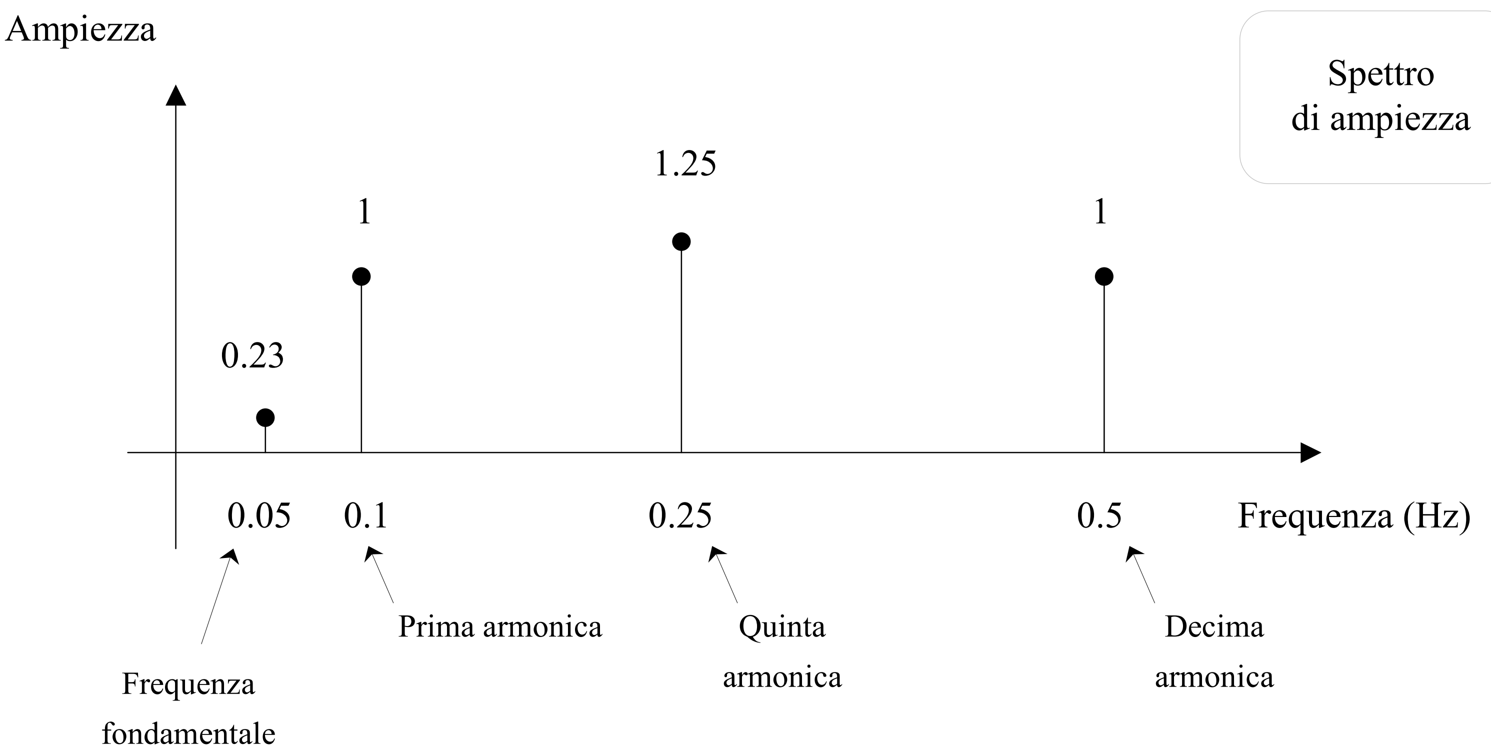


Frequenza fondamentale

$f_0 = 0.05\,\mathrm{Hz}$



Rappresentazione in frequenza di un segnale arbitrario



Spettro di ampiezza

Banda del segnale $x(t)$ = 0.5 Hz

Segnali audio

• Segnale audio normale: le componenti frequenziali significative appartengono all'intervallo

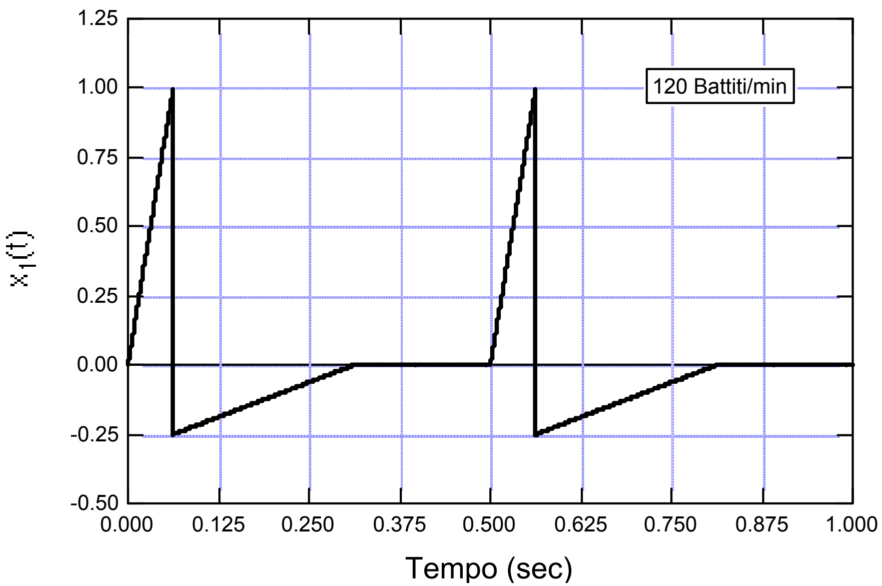
50 Hz - 4500 Hz

• Segnale audio musicale ad alta fedeltà: le componenti frequenziali significative appartengono all'intervallo

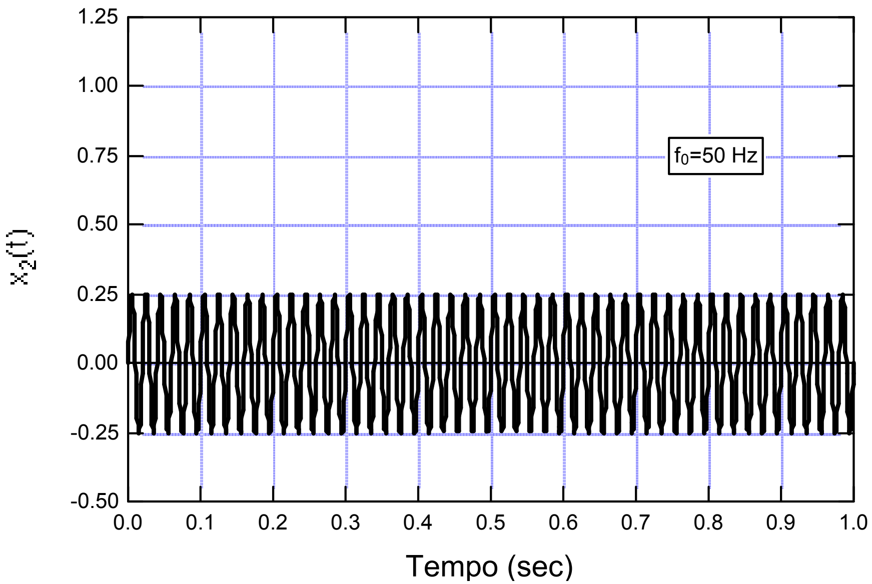
30 Hz - 15000 Hz

Filtri

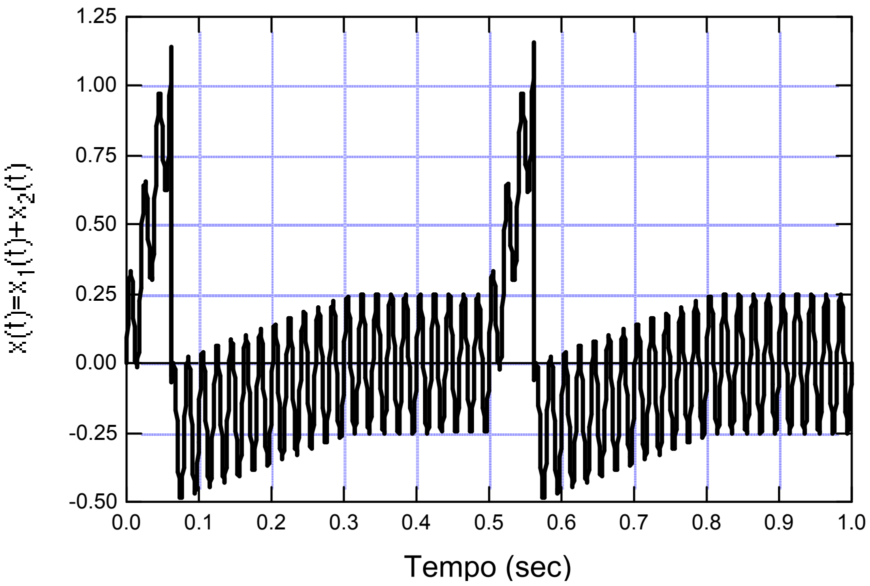
• Un caso tipico che si presenta nella elaborazione dei segnali è quello in cui il segnale osservato è costituito dalla sovrapposizione, cioè la *somma*, di due segnali dei quali il primo è un segnale utile, cioè portatore di informazione, mentre il secondo rappresenta solo un *disturbo* ineliminabile alla fonte. Nella raccolta di un segnale elettrocardiografico ad esempio, può accadere che alla tensione raccolta dai sensori sul corpo del paziente (molto debole, dell'ordine di grandezza dei mV e stilizzata nella figura (a) successiva) venga a sovrapporsi un disturbo dovuto alla *tensione di alimentazione* fornita all'apparato elettromedicale dalla normale rete elettrica 220 V-50 Hz (come in Figura (b)). Se il circuito elettrico dello strumento non è realizzato con la massima accuratezza, il residuo della tensione di alimentazione può rivelarsi dello stesso ordine di grandezza del segnale utile. In un caso di questo genere, è fondamentale riuscire a discriminare il segnale utile dal disturbo, cosa apparentemente impossibile tenendo conto che il segnale osservato è la *sovrapposizione* di queste due componenti.



Segnale utile


1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
-0.25
-0.50
x2(t)
f0=50 Hz
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
Tempo (sec)

Disturbo



Segnale complessivo